Θέμα Α

Α1 – β , Α2 – γ , Α3 – δ , Α4 – γ , Α5 α – Λ , β – Σ , γ – Λ , δ – Λ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Όταν κινείται ο παρατηρητής ισχύει:

$$f_\delta = \left| f_{A1} - f_{A2} \right| = \left| \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S - \frac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_S \right| \Rightarrow f_\delta = \frac{2\upsilon_A}{\upsilon} f_S = \frac{2\upsilon_A}{\lambda f_S} f_S \Rightarrow f_\delta = \frac{2\upsilon_A}{\lambda} (1)$$

Μεταβάλλουμε τη συχνότητα και των δύο πηγών κατά $\Delta f = 4Hz$ έστω αυξάνοντας της πηγής S_1 δηλαδή $f_{S1} = f_S + \Delta f$ και μειώνοντας της πηγής S_2 δηλαδή $f_{S2} = f_S - \Delta f$. Με ακίνητο τον παρατηρητή για τη συχνότητα των διακροτημάτων ισχύει πάλι:

$$f_\delta = \left| f'_{A1} - f'_{A2} \right| = \left| f_{S1} - f_{S2} \right| = \left| f_S + \Delta f - f_S + \Delta f \right| \Rightarrow f_\delta = 2\Delta f \ (2)$$

Από $(1) = (2) \Rightarrow \frac{2\upsilon_A}{\lambda} = 2\Delta f \Rightarrow \upsilon_A = \lambda \cdot \Delta f \Rightarrow \upsilon_A = 2\frac{m}{s}$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Στην πρώτη περίπτωση εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli έχουμε:

$$p_{\varepsilon\mu\beta} + 0 + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow p_{atm} + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{2gh} .$$

Έστω y η απόσταση της οπής από το έδαφος. Ο χρόνος που χρειάζεται η φλέβα για να φτάσει στο έδαφος είναι: $y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$ και το βεληνεκές της φλέβας είναι $s_1 = \upsilon_1 \cdot t$.

Στη δεύτερη περίπτωση που εφαρμόζεται η κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ εφαρμόζοντας την εξίσωση του Bernoulli έχουμε: $p'_{\varepsilon\mu\beta} + 0 + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + 0 \Rightarrow$

$$p_{atm} + \frac{F}{A} + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow \frac{F}{A} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 (1)$$

Ο χρόνος που χρειάζεται η φλέβα για να φτάσει στο έδαφος είναι ίδιος με την προηγούμενη περίπτωση και το βεληνεκές της φλέβας είναι $s_2 = \upsilon_2 \cdot t$. Όμως $s_2 = 3s_1 \Rightarrow \upsilon_2 \cdot t = 3\upsilon_1 \cdot t \Rightarrow \upsilon_2 = 3\upsilon_1$

Από $(1) \Rightarrow \frac{F}{A} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho \cdot 9\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{F}{A} + \rho g h = \frac{1}{2}\rho \cdot 9 \cdot 2gh \Rightarrow F = 8\rho g h A$

Β3. Ι. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Για το σύστημα πλατφόρμα – φοιτητής – τροχός ισχύει $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 0$ άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Η στροφορμή του συστήματος αρχικά είναι μηδενική οπότε και τελικά θα είναι μηδενική. Αφού ο τροχός θα στραφεί κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, το σύστημα πλατφόρμα – φοιτητής – τροχός θα στραφεί προς την αντίθετη φορά για να διατηρηθεί η στροφορμή.

Έχουμε: $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{0} = \vec{L}_{\tau\rho o\chi} + \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \Rightarrow \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = -\vec{L}_{\tau\rho o\chi} \Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \cdot \omega = -I_{\tau\rho o\chi} \cdot \omega_0 \Rightarrow$

$$20 I_{\tau\rho o\chi} \cdot \omega = -I_{\tau\rho o\chi} \cdot \omega_0 \Rightarrow \omega = -\frac{\omega_0}{20}$$

ΙΙ. Σωστή απάντηση είναι (α).

Η κινητική ενέργεια του τροχού είναι $K_{\tau\rho o\chi} = K = \frac{1}{2} I_{\tau\rho o\chi}\omega_0^2$. Η κινητική ενέργεια του συστήματος πλατφόρμα – φοιτητής – τροχός μετά την περιστροφή του τροχού είναι:

$$K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{2} I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}\omega^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot I_{\tau\rho o\chi} \frac{\omega_0^2}{400} = \frac{1}{20}\frac{1}{2} I_{\tau\rho o\chi}\omega^2 = \frac{1}{20} K_{\tau\rho o\chi} = \frac{1}{20} K \Rightarrow K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{20} K$$

Από την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας έχουμε:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow E_{\chi\eta\mu} = K_{\tau\rho o\chi} + K_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = K + \frac{1}{20} K \Rightarrow E_{\chi\eta\mu} = \frac{21}{20} K$$

Θέμα Γ

Γ1. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά τη στιγμή που το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας έχοντας μέτρο ταχύτητας $\upsilon_1 = \upsilon_{\max} = \omega \cdot A = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \cdot A \Rightarrow \upsilon_1 = 5\dfrac{m}{s}$. Επειδή τα σώματα έχουν ίσες μάζες θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Θεωρώντας θετική φορά προς τα αριστερά για τις ταχύτητες μετά την κρούση έχουμε: $\upsilon_1' = \upsilon_2 = 10\dfrac{m}{s}$ και $\upsilon_2' = -\upsilon_1 = -5\dfrac{m}{s}$.

Γ2. Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 είναι:

$$\pi = \frac{\Delta K_1}{K_1}100\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1}100\% = \left(\frac{K_1'}{K_1} - 1\right)100\% = \left(\frac{\upsilon_1'^2}{\upsilon_1^2} - 1\right)100\% \Rightarrow \pi = 300\%$$

Γ3. Όταν ο δέκτης Δ καταγράφει ήχο ίδιας συχνότητας με της πηγής S θα πρέπει τα δύο σώματα να έχουν τις ίδιες ταχύτητες, δηλαδή $\vec{\upsilon}_\Delta = \vec{\upsilon}_S$, οπότε πρέπει και τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση και να έχουν εκείνη τη στιγμή ίδιο μέτρο ταχύτητας.

Ισχύει $f_\Delta = \dfrac{\upsilon + |\upsilon_\Delta|}{\upsilon + \upsilon_S} f_S$, όμως $f_\Delta = f_S$, άρα $|\upsilon_\Delta| = \upsilon_S = 5\dfrac{m}{s}$.

Το σώμα Σ_1 έχει μέτρο ταχύτητας $|\upsilon_\Delta| = 5\dfrac{m}{s}$ σε δύο θέσεις πάνω στον άξονα της ταλάντωσης. Από την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_{max}^2 = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_{max}^2 + \frac{1}{2}D \cdot x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon_\Delta^2} = x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}m$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 είναι: $\dfrac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx = -kx$ οπότε:

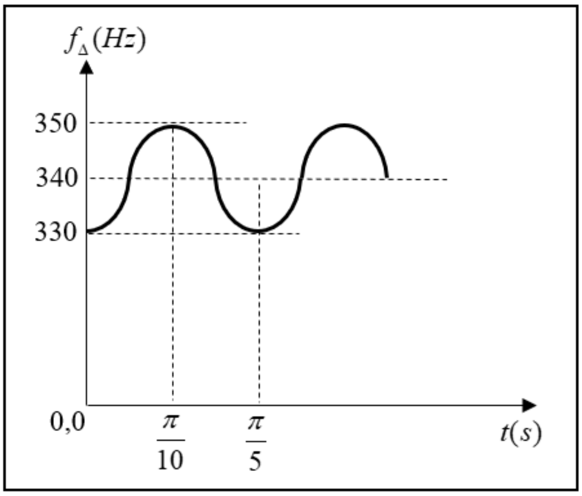
όταν $x = +\dfrac{\sqrt{3}}{2}m \rightarrow \dfrac{dp}{dt} = -200\left(+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)N \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = -100\sqrt{3}N$

όταν $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}m \rightarrow \dfrac{dp}{dt} = -200\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)N \Rightarrow \dfrac{dp}{dt} = +100\sqrt{3}N$

Γ4. Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος Σ_1, άρα και του δέκτη Δ, περιγράφεται από την εξίσωση: $\upsilon_{1(\Delta)} = \upsilon_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$.

Έχουμε $\upsilon_{\max} = \upsilon_1' = 10\dfrac{m}{s}$ η ταχύτητα του σώματος Σ_1 στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης αμέσως μετά την κρούση, γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m}} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10\dfrac{rad}{s}$, περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{5}s$ και $\varphi_0 = 0$ αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση.

Άρα $\upsilon_{1(\Delta)} = 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)\ S.I.$ Η συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης μετά την κρούση σε συνάρτηση με τον χρόνο περιγράφεται από τη σχέση:

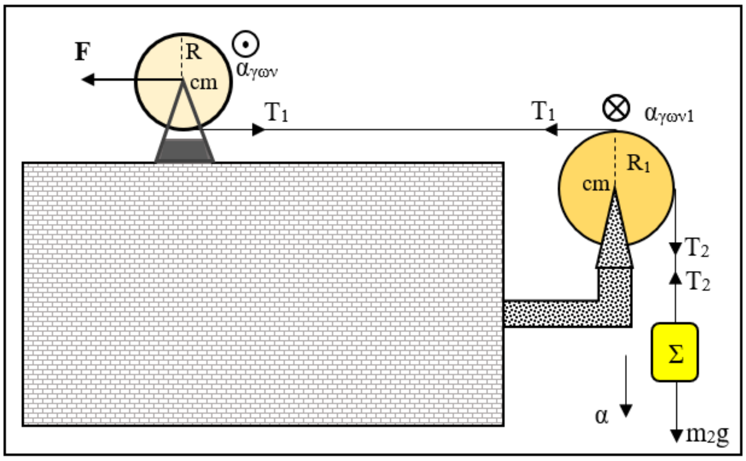


$$f_\Delta = \frac{\upsilon - \upsilon_{1(\Delta)}}{\upsilon + \upsilon_S} f_S = \frac{340 - 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)}{340 + 5} \cdot 345 \Rightarrow f_\Delta = 340 - 10 \cdot \sigma\upsilon\nu(10t)\ S.I.$$

Γραφική παράσταση σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα.

Θέμα Δ

Δ1. Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του σώματος άρα:



$$\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho(R_1)} = R_1\omega_1 \rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_{\gamma\rho(R_1)}}{dt} = R_1\frac{d\omega_1}{dt} \Rightarrow$$

$$a = a_{\varepsilon(R_1)} = R_1\alpha_{\gamma\omega\nu 1} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu 1} = \frac{a}{R_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu 1} = 10\frac{rad}{s^2}$$

Επίσης το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του τροχού είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του σώματος άρα: $\upsilon = \upsilon_{\gamma\rho(R)} = R\omega \rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_{\gamma\rho(R)}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$

$$a = a_{\varepsilon(R)} = R\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{a}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 20\frac{rad}{s^2}$$

Δ2. Το σύστημα βάση – τροχός δε μεταφέρεται άρα ισχύει: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T_1$

Για τη στροφική κίνηση του τροχού από τον θεμελιώδη νόμο στροφικής έχουμε:

$\Sigma\tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{T_1} = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 R = mR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 = mRa_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 = 4N$, άρα $F = 4N$

Δ3. Όταν το σώμα Σ έχει μετατοπιστεί κατά $y_\Sigma = 2m$ έχουμε από τι εξισώσεις κίνησης:

$y_\Sigma = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_\Sigma}{a}} \Rightarrow t = 1s$ άρα η ταχύτητα του σώματος είναι $\upsilon = \alpha t = 4\frac{m}{s}$ και η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι $\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu}t = 10\frac{rad}{s}$

α) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\frac{dK_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma\tau_1}}{dt} = \frac{\Sigma\tau_1 \cdot d\theta_1}{dt} = \Sigma\tau_1 \cdot \omega_1 = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu 1} \cdot \omega_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1R_1^2 a_{\gamma\omega\nu 1} \cdot \omega_1 \Rightarrow \frac{dK_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma}}{dt} = 32\frac{J}{s}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σώματος Σ υπολογίζεται από τον τύπο:

$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -\frac{dW_{m_2g}}{dt}$ όπου $\frac{dW_{m_2g}}{dt} = \frac{+m_2g \cdot dy}{dt} = +m_2g\frac{dy}{dt} = +m_2g \cdot \upsilon$

άρα $\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -m_2g \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -80\frac{J}{s}$

Δ4. Η κινητική ενέργεια του σώματος m_3 υπολογίζεται από τον τύπο $K_3 = \frac{1}{2}m_3\upsilon_3^2 = 48J$.

Η κινητική ενέργεια της τροχαλίας υπολογίζεται από τον τύπο $K_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega_1^2 \Rightarrow$

$K_{m_1} = K_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1 R_1^2 \omega_1^2 \Rightarrow$ όπου $\upsilon = R_1\omega_1$ άρα $K_{m_1} = K_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 = \frac{1}{2}K_3 = 24J$

Στο παραπάνω σύστημα όταν αφεθεί ελεύθερο να κινηθεί η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται είναι το βάρος του σώματος m_3 (οι τάσεις είναι εσωτερικές δυνάμεις) οπότε εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ έχουμε: $E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi} = E_{\mu\eta\chi,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$$K_{\substack{m+M\\ \alpha\rho\chi}} + K_{m_1,\alpha\rho\chi} + K_{3,\alpha\rho\chi} + U_{\substack{m+M\\ \alpha\rho\chi}} + U_{m_1,\alpha\rho\chi} + U_{3,\alpha\rho\chi} = K_{\substack{m+M\\ \tau\varepsilon\lambda}} + K_{m_1,\tau\varepsilon\lambda} + K_{3,\tau\varepsilon\lambda} + U_{\substack{m+M\\ \tau\varepsilon\lambda}} + U_{m_1,\tau\varepsilon\lambda} + U_{3,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο και οι δυναμικές ενέργειες της τροχαλίας και του συστήματος τροχός – βάση δεν αλλάζουν άρα: $U_{3,\alpha\rho\chi} = K_{\substack{m+M\\ \tau\varepsilon\lambda}} + K_{m_1,\tau\varepsilon\lambda} + K_{3,\tau\varepsilon\lambda} + U_{3,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$$m_3 g \cdot y = K_{m+M} + K_{m_1} + K_3 + 0 \Rightarrow 80J = K_{m+M} + 24J + 48J \Rightarrow K_{m+M} = 8J$$

Άρα $\frac{K_{(m+M)}}{K_{m_1}} = \frac{8J}{24J} \Rightarrow \frac{K_{(m+M)}}{K_{m_1}} = \frac{1}{3}$